– Parcijalni izvodi složene funkcije –

Teorema 1: Neka su funkcije φ i ψ diferencijabilne u tački $M(x,y)$ i funkcija f diferencijabilna u tački $P(u,v)$ gdje je $u=\varphi(M)$ i $v=\psi(M)$. Tada je složena funkcija $z=f(\varphi(M),\psi(M))$ diferencijabilna u tački $M(x,y)$ i pri tome je:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

i $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Primjer 1: Transformisati jednačinu:

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad (*)$$

uvodeći nove promjenljive $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ i $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

R| $u=\ln\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$

$$v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \quad (2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo:

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$- (x-y)\left(\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right) =$$

$$= \left(\frac{x(x+y)}{x^2+y^2} - \frac{(x-y)y}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial z}{\partial u} - \left(\frac{(x+y)y+(x-y)x}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$$

Iz (*) slijedi: $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

– Ekstremne vrijednosti funkcija više promjenljivih –

<u>Def 1:</u> (1) Neka je $f: D \to R$, $D \subset R^2$ funkcija dvije promjenljive i $M_0(x_0, y_0)$ unutrašnja tačka skupa D. Tačka $M_0(x_0, y_0)$ je tačka lokalnog minimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0, y_0)$ tako da za

svaku tačku $M(x,y)$ iz te okoline važi
$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.
Tačka $M_0(x_0,y_0)$ je tačka lokalnog maksimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0,y_0)$ tako da za svaku tačku $M(x,y)$ iz te okoline važi $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.
Tačke lokalnog minimuma i tačke lokalnog maksimuma nazivaju se tačkama lokalnih ekstremuma funkcije $z=f(x,y)$, a vrijednosti funkcije u njima su lokalni ekstremumi funkcije.

__Teorema 1:__ Ako je $M_0(x_0,y_0)$ tačka lokalnog ekstremuma diferencijabilne funkcije f, onda je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

__Napomena:__ Za tačku $M_0(x_0,y_0)$ kažemo da je stacionarna tačka funkcije $z=f(x,y)$ ako važi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Iz prethodne teoreme slijedi da je tačka lokalnog ekstremuma diferencijabilne f-je ujedno i stacionarna tačka. Obrnuto ne mora da važi.

Primjer 1: Neka je $z = x \cdot y$.

Odredimo stacionarne tačke fje

$$f(x,y) = x \cdot y$$

Iz sistema $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}$

Dakle tačka $M_0(0,0)$ je stacionarna tačke funkcije. i pri tome je $f(M_0) = f(0,0) = 0$.
U svakoj okolini tačke $M_0(0,0)$ postoji tačka $M_1(x_1,y_1)$ gdje je $x_1 > 0$ i $y_1 > 0$ i $M_2(x_2, y_2)$ gdje je $x_2 > 0$ i $y_2 < 0$ pa je:
$f(M_1) = x_1 \cdot y_1 > 0 = f(M_0)$ a $f(M_2) = x_2 y_2 < 0 = f(M_0)$,
što znači da M_0 nije tačka lokalnog ekstremuma.

Teorema 2: (dovoljan uslov lokalnog ekstremuma)

Neka je $M_0(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x,y)$, koja ima neprekidne izvode drugog reda u okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$.

1) Ako je $d^2 f(x_0,y_0) > 0$ tada je tačka $M_0(x_0, y_0)$ tačka lokalnog minimuma funkcije f.

2) Ako je $d^2 f(x_0, y_0) < 0$ tada je tačka $M_0(x_0, y_0)$ tačka lokalnog maksimuma funkcije f.

Neka funkcija $z=f(x,y)$ ima stacionarnu tačku $M_0(x_0,y_0)$ i neka ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$.

Uvedimo oznake:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big/(x_0,y_0),\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big/(x_0,y_0),\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big/(x_0,y_0)$$

i $D(M_0)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$

Tada prethodnu teoremu možemo ovako formulisati:

1) Ako je $D(M_0)>0$, tada je $M_0(x_0,y_0)$ tačka lokalnog ekstremuma funkcije f, i to, tačka lokalnog minimuma ako je $A>0$ a tačka lokalnog maksimuma ako je $A<0$.

2) Ako je $D(M_0)<0$ tada tačka M_0 nije tačka lokalnog ekstremuma funkcije f.

3) Ako je $D(M_0)=0$ potrebno je dodatno ispitivanje.

Primjer 2: Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije: $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = x^2 \\ x^4 = x\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y = x^2 \\ x(x^3-1) = 0\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0\end{array} \vee \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1.\end{array}$$

Dakle imamo stacionarne tačke $M(0,0)$ i $N(1,1)$.

Odredimo parcijalne izvode drugog reda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

1) $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big/_{M(0,0)} = 0$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big/_{M(0,0)} = -3$,

$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big/_{M(0,0)} = 0.$

$D(M) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow M(0,0)$ nije tačka lokalnog ekstremuma date funkcije z.

2) $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big/_{N(1,1)} = 6$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big/_{N(1,1)} = -3$,

$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big/_{N(1,1)} = 6.$

$D(N) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$ i $A > 0 \Rightarrow N(1,1)$ je tačka lokalnog minimuma i $z_{min} = z(1,1) = -1$.

Napomena: U primjeru 2, nakon određivanja stacionarnih tačaka $M(0,0)$ i $N(1,1)$ mogli smo koristiti Teoremu 2

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= 6x\,dx^2 - 6\,dx\,dy + 6y\,dy^2$$

U tački $N(1,1)$ dobijamo da je:

$$d^2z(1,1) = 6dx^2 - 6dx\,dy + 6dy^2 =$$

$$= 6\left(dx^2 - dx\,dy + \frac{1}{4}dy^2 - \frac{1}{4}dy^2 + dy^2\right) =$$

$$= 6\left(\left(dx - \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}dy^2\right) > 0,$$

pa je tačka $N(1,1)$ tačka lokalnog minimuma.

U tački $M(0,0)$ dobijamo da je

$$d^2z(0,0) = -dx\,dy \Rightarrow M(0,0)$$ nije tačka lokalnog ekstremuma, jer $d^2z(0,0)$ može biti i pozitivan i negativan.

Primjer 3: Posmatrajmo funkciju $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Ova f-ja nema parcijalne izvode u tački $(0,0)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Kako je $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$

dok je $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$

to <u>ne postoji</u> $\frac{\partial f}{\partial x}/(0,0)$. Slično ne postoji $\frac{\partial f}{\partial y}/(0,0)$. Ali, za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ važi $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 = f(0,0)$. tj. tačka $(0,0)$ je tačka minimuma funkcije $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Za $(x,y) \neq (0,0)$ važi $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, i $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pa u ovom slučaju funkcija nema stacionarnih tačaka.

– Ekstremne vrijednosti funkcije tri promjenljive –

<u>Def</u>: Neka je $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija tri promjenljive i $M_0(x_0, y_0, z_0)$ unutrašnja tačka skupa D. Tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je tačka lokalnog minimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ takva da za svaku tačku $M(x,y,z)$ iz te okoline važi $f(x,y,z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$.

9

Tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ je tačka lokalnog maksimuma funkcije f ako postoji okolina tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ takva da za svaku tačku $M(x, y, z)$ iz te okoline važi $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$.

Teorema 1: Neka je f realna funkcija tri promjenljive koja ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u nekoj okolini tačke $A(x_0, y_0, z_0)$ i neka je $A(x_0, y_0, z_0)$ stacionarna tačka funkcije f tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$.

- Ako je $d^2 f(A) > 0$ (za $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$) onda je tačka $A(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog minimuma funkcije f.
- Ako je $d^2 f(A) < 0$ (za $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$) onda je tačka $A(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog maksimuma funkcije f.

(Ukoliko $d^2 f(A)$ mijenja znak, tada fja f u tački A nema lokalni ekstremum).

(10)

Neka je $M_0(x_0,y_0,z_0)$ stacionarna tačka funkcije $u=f(x,y,z)$ i neka ova funkcija ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u okolini tačke $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Neka je $A_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$, $A_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$,

$A_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$, $B_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$,

$B_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$, $C_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{M_0(x_0,y_0,z_0)}$.

Formirajmo matricu:

$$H(M_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Big|_{M_0} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\Big|_{M_0} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{M_0} \end{bmatrix}$$

tj. $$H(M_0) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & B_1 & B_2 \\ A_3 & B_2 & C_1 \end{bmatrix}$$

Tada dovoljan uslov lokalnog ekstremuma u tački M_0 možemo ovako formulisati:

- Ako je $A_1 > 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & B_1 \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & B_1 & B_2 \\ A_3 & B_2 & C_1 \end{vmatrix} > 0$,

onda je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog minimuma.

- Ako je $A_1 < 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & B_1 \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & B_1 & B_2 \\ A_3 & B_2 & C_1 \end{vmatrix} < 0$,

onda je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka lokalnog maksimuma.

<u>Primjer</u>: Odrediti lokalne ekstremume funkcije $u = x^2 + y^2 + z^2 + (4-x-y-z)^2$.

<u>R/</u>
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x - 2(4-x-y-z) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y - 2(4-x-y-z) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z - 2(4-x-y-z) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (1)\ 2x &= 4-y-z \\ 2y &= 4-x-z \\ 2z &= 4-x-y \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) = 12 - 2(x+y+z) \Rightarrow x+y+z = 3$$

$$\Rightarrow y+z = 3-x \underset{(1)}{\Rightarrow} 2x = 4-(3-x) \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Jedina stacionarna tačka je $M_0(1,1,1)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2$$

pa je $H(M_0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

kako je $\Delta_1 = 4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 > 0$

to je $M_0(1,1,1)$ tačka lokalnog minimuma
dje u i $u_{min} = f(1,1,1) = 4$.

II način:

Kad odredimo stacionarnu tačku, $M_0(1,1,1)$ posmatramo $d^2 f(M_0)$.

$$d^2 f(M_0) = 4dx^2 + 4dy^2 + 4dz^2 + 4dxdy + 4dydz + 4dxdz$$
$$= 2(dx + dy + dz)^2 + 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 > 0$$

pa je $M_0(1,1,1)$ tačka lokalnog minimuma.

Primjer: Odrediti lokalne ekstreme funkcije $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

R/

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{2}{z^2} + \frac{2z}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y^2}{4x^2} &= 1 \\ \frac{z^2}{y^2} &= \frac{y}{2x} \ (*) \\ \frac{z}{y} &= \frac{1}{z^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{y}{2x} &= \pm 1 \\ \frac{z}{y} &= \pm 1 \\ z &= \pm 1 \end{aligned}$$

Kako je $\frac{y}{2x} = \frac{z^2}{y^2} \geq 0$ to je $\frac{y}{2x} = 1$.

Slično iz $\frac{z}{y} = \frac{1}{z^2} > 0 \Rightarrow \frac{z}{y} = 1$.

1) $z = 1 \Rightarrow y = 1,\ x = \frac{1}{2}$;

2) $z = -1 \Rightarrow y = -1,\ x = -\frac{1}{2}$;

Dakle imamo dvije stacionarne tačke $A(\frac{1}{2}, 1, 1)$ i $B(-\frac{1}{2}, -1, -1)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{4}{z^3} + \frac{2}{y}$$

1) $A(\frac{1}{2}, 1, 1)$

$$H(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix};$$

Kako je $4 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$

to u tački A funkcija ima lokalni minimum.

$u_{min} = f(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$.

2) $B(-\frac{1}{2}, -1, -1)$

$$H(B) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Kako je $-4 < 0$, $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -32 < 0$

to u tački B funkcija ima lokalni maksimum, $u_{max} = f(-\frac{1}{2}, -1, -1) = -4$.

- Uslovni ekstremumi -

1

Ukoliko je naš zadatak da odredimo ekstremne vrijednosti funkcije $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pod odredjenim uslovima:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

onda ćemo prvo formirati pomoćnu funkciju:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ovu funkciju nazivamo Lagranžovom funkcijom a parametre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nazivamo Lagranžovim množiteljima (ima ih onoliko koliko i uslova).

Stacionarne tačke nalazimo rješavajući sistem jednačina:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Zatim odredjujemo znak drugog diferencijala d^2F u stacionarnim tačkama.

Neka je $M(x_1, x_2, .., x_n)$ stacionarna tačka i $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_k$ odgovarajuće vrijednosti Lagranžovih množitelja.

1° Ako je $d^2F(M) < 0$ tada je M tačka uslovnog maksimuma funkcije f.

2° Ako je $d^2F(M) > 0$, tada je M tačka uslovnog minimuma funkcije f.

3° Ako je $d^2F(M) = 0$ potrebno je dodatno ispitivanje.

Često ćemo za određivanje znaka d^2F morati da diferenciramo uslove (*).

Mi ćemo se u primjerima baviti određivanjem uslovnog ekstremuma funkcije dvije promjenljive $z = f(x,y)$ uz jedan uslov $g(x,y) = 0$.

U tom slučaju, prvo formiramo pomoćnu funkciju:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$

Iz sistema:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

određujemo stacionarne tačke, a zatim na osnovu znaka d^2F ispitujemo da li se radi o tački uslovnog ekstremuma.

Pri tome nekad ~~je~~ je potrebno diferencirati uslov $g(x,y) = 0$ tj. koristiti da je $\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0$.

3

Primjer 1: Odrediti uslovni ekstremum funkcije

$$z = f(x,y) = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}} \quad \text{uz uslov } x^2+y^2=1.$$

I) Formiramo Lagranžovu funkciju:

$$F(x,y,\lambda) = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}} + \lambda(x^2+y^2-1)$$

Rešavamo sistem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ x^2+y^2&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda x &= 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2\lambda\sqrt{2}} \\ y &= \frac{1}{2\lambda\sqrt{2}} \\ x^2+y^2&=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 1 \qquad \lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2\lambda\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{1}{2\lambda\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{2\lambda\sqrt{2}} \qquad\qquad y = \frac{1}{2\lambda\sqrt{2}}$$

1° $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2° $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dakle imamo stacionarnu tačku $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ kojoj odgovara vrijednost $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, i stacionarnu tačku $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ kojoj odgovara vrijednost $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$ to je

$$(*)\ d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda\,dx^2 + 2\lambda\,dy^2.$$

1° za tačku $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ važi:

$$d^2F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \underset{(*)}{=} 2\cdot\frac{1}{2}dx^2 + 2\cdot\frac{1}{2}dy^2 = dx^2 + dy^2 > 0$$

pa ~~za~~ tački $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcija ima uslovni minimum, $z_{min} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 4}{\sqrt{2}}$.

2° za tačku $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ važi:

$$d^2F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dy^2 =$$

$= -dx^2 - dy^2 < 0$ pa je tačka $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tačka uslovnog maksimuma, $z_{max} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 4}{\sqrt{2}}$.

Primjer 2: Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ uz uslov $4x^2 + y^2 = 25$.

R/ Formiramo Lagranžovu funkciju:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25).$$

Rešavamo sistem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ 4x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + 12y + 8\lambda x &= 0 \\ 12x + 4y + 2\lambda y &= 0 \\ 4x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

5

$$\left.\begin{aligned}(1+4\lambda)x+6y&=0 \quad (1)\\ 6x+(2+\lambda)y&=0 \quad (2)\\ 4x^2+y^2&=25 \quad (3)\end{aligned}\right\} \to (**)$$

Sistem jednačina (1), (2) ima netrivijalna rješenja ako je $\begin{vmatrix} 1+4\lambda & 6 \\ 6 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0$ tj. $4\lambda^2+9\lambda-34=0$.

Rješenja ove jednačine su $\lambda_1 = -\frac{17}{4}$ i $\lambda_2 = 2$.

1° $\lambda_1 = -\frac{17}{4}$: Zamjenom u $(**)$ dobijamo:

$$\left.\begin{aligned}(1+4\cdot(-\tfrac{17}{4}))x+6y&=0\\ 6x+(2-\tfrac{17}{4})y&=0\\ 4x^2+y^2&=25\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1&=\tfrac{3}{2} & x_2&=-\tfrac{3}{2}\\ y_1&=4 & y_2&=-4\end{aligned}$$

pa imamo stacionarne tačke $A_1(\frac{3}{2},4)$, $A_2(-\frac{3}{2},-4)$ za $\lambda_1=-\frac{17}{4}$.

2° $\lambda_2=2$. Zamjenom u $(**)$ dobijamo:

$$\left.\begin{aligned}(1+4\cdot 2)x+6y&=0\\ 6x+(2+2)y&=0\\ 4x^2+y^2&=25\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_3&=2 & x_4&=-2\\ y_3&=-3 & y_4&=3\end{aligned}$$

pa imamo stacionarne tačke $A_3(2,-3)$ i $A_4(-2,3)$.

Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2+8\lambda$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4+2\lambda$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 12$

to je $d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 =$

$= (2+8\lambda)dx^2 + 24\,dxdy + (4+2\lambda)dy^2.$

1° za tačku $A_1(\frac{3}{2}, 4)$, $\lambda = -\frac{17}{4}$ važi:

$$d^2F(\tfrac{3}{2}, 4) = (2 + 8\cdot(-\tfrac{17}{4}))dx^2 + 24\,dxdy + (4 + 2\cdot(-\tfrac{17}{4}))dy^2$$
$$= -32\,dx^2 + 24\,dxdy - \tfrac{9}{2}dy^2 \quad (1)$$

Diferencirajući izraz $4x^2 + y^2 = 25$ dobijamo da je:

$$8x\,dx + 2y\,dy = 0$$

tj. $8\cdot\frac{3}{2}dx + 2\cdot 4\,dy = 0$ tj. $dy = -\frac{3}{2}dx$

pa ako ovo zamijenimo u (1) dobijamo:

$$\cancel{d^2F(\tfrac{3}{2}, 4) = -32\,dx^2 + 24\,dx\cdot(-\tfrac{3}{2}dx) - \tfrac{9}{2}d}$$

$$d^2F(\tfrac{3}{2}, 4) = -32\,dx^2 + 24\,dx\cdot(-\tfrac{3}{2}dx) - \tfrac{9}{2}\cdot(-\tfrac{3}{2}dx)^2 =$$
$$= -\tfrac{625}{8}dx^2 < 0$$ pa u tački $A_1(\frac{3}{2}, 4)$ funkcija ima uslovni maksimum $z_{max} = \frac{425}{4}$.

Na isti način se pokazuje da u tački $A_2(-\frac{3}{2}, -4)$, $\lambda = -\frac{17}{4}$ važi: $d^2F(-\frac{3}{2}, -4) = -\frac{625}{8}dx^2 < 0$ pa u tački $A_2(-\frac{3}{2}, -4)$ funkcija ima uslovni maksimum. $z_{max} = \frac{425}{4}$.

2° Za tačku $A_3(2, -3)$, $\lambda = 2$ važi:

$$d^2F(2, -3) = (2 + 8\cdot 2)dx^2 + 24\,dxdy + (4 + 2\cdot 2)dy^2$$
$$= 18\,dx^2 + 24\,dxdy + 8\,dy^2 \quad (2)$$

Diferenciranjem izraza $4x^2 + y^2 = 25$ dobijamo:

$$8x\,dx + 2y\,dy = 0$$

tj. $8\cdot 2\,dx + 2\cdot(-3)\,dy = 0$ tj. $dy = \frac{8}{3}dx$ pa

zamjenom u (2) dobijamo:

$$d^2F(2, -3) = 18\,dx^2 + 24\,dx\cdot(\tfrac{8}{3}dx) + 8\cdot(\tfrac{8}{3}dx)^2 =$$
$$= (82 + \tfrac{864}{9})dx^2 > 0$$

pa funkcija u tački $A_3(2,-3)$ ima uslovni minimum, $z_{min}=-50$.
Analogno dobijamo da funkcija u tački $A_4(-2,3)$ ima uslovni minimum, $z_{min}=-50$.

Primjer 3: Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije $u=f(x,y,z)=x-2y+2z$ uz uslov $x^2+y^2+z^2=1$.

R: Formiramo Lagranžovu funkciju:

$$F(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

Iz sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}1+2\lambda x=0\\ -2+2\lambda y=0\\ 2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=-\frac{1}{2\lambda}\\ y=\frac{1}{\lambda}\\ z=-\frac{1}{\lambda}\\ x^2+y^2+z^2=1\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}x=-\frac{1}{2\lambda}\\ y=\frac{1}{\lambda}\\ z=-\frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1=\frac{3}{2},\ x_1=-\frac{1}{3},\ y_1=\frac{2}{3},\ z_1=-\frac{2}{3}\\ \lambda_2=-\frac{3}{2},\ x_2=\frac{1}{3},\ y_2=-\frac{2}{3},\ z_2=\frac{2}{3}\end{array}$$

Imamo stacionarne tačke $M_1\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ za $\lambda_1=\frac{3}{2}$ i $M_2\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ za $\lambda_2=-\frac{3}{2}$.

(8)

Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda$, i $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} =$

$= 0$, to je:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} dz^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz\right) = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2$$

1° za tačku $M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\lambda = \frac{3}{2}$ važi:

$$d^2F\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} dx^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} dy^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} dz^2 =$$

$= 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$ pa u tački M_1 funkcija ima uslovni minimum, $u_{min} = f(M_1) = -3$.

2° za tačku $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\lambda = -\frac{3}{2}$ važi:

$$d^2F\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) dx^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) dy^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) dz^2$$

$$= -3(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$$

pa u tački M_2 funkcija ima uslovni maksimum

$u_{max} = f(M_2) = 3$.